

## مقایسه مدل ریاضی محیط کسرات و کلاسیک برای جریان ضربانی

### خون با شرط مرزی چرخش روی دیواره

غلامعلی عاطفی<sup>۱</sup>، سروش مداح<sup>۲</sup> و علی معروفی<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۲/۱۳)

#### چکیده

در مدل پیوسته کلاسیک با فرض داشتن میدان سرعت می‌توان یک مساله را کاملاً توصیف کرد، در حالی که این توصیف برای تحلیل پدیده‌های پیچیده مناسب نمی‌باشد. از طرفی، با توجه به رفتار غیر نیوتنی خون، به نظر می‌رسد استفاده از تئوری سیالات ریز قطبی مبتنی بر مدل محیط پیوسته کسرات برای بررسی جریان ضربانی خون منطقی باشد. هدف از ارائه این مقاله بدست آوردن میدان سرعت تحلیلی برای مقایسه با میدان سرعت تجربی مناسب در آینده است. در این مقاله، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از دو مدل کلاسیک و کسرات با توجه به شرط چرخش روی دیواره انجام شده است. با استفاده از تبدیلات هانکل و لاپلاس توانستیم جریان ضربانی سیال کسرات را نیز بصورت تحلیلی و دقیق حل کنیم.

**واژه های کلیدی:** محیط پیوسته کسرات، تبدیل هانکل و لاپلاس، شرط مرزی چرخش

## Comparison between the Cosserat and Classical Mathematical Models for the Pulsative Blood Flow with Spinning Boundry Condition at the Wall

GH. Atefi, S. Maddah, and A. Maroofi

Mech. Eng. Dep't., Iran Univ. of Sci. and Tech.

#### ABSTRACT

In the classic continous model, assuming velocity field, one can completely define the problem. However, this is not suitable for the analysis of complex flows. On the other hand, according to the non-Newtonian behavior of blood, it seems that the use of theory of micro-polar fluids, based on the Cosserat continous model for the investigation of blood pulsatile fluid, is logical. The goal of this paper is to derive the analytical velocity field for comparison with suitable experimental velocity field in the future. In this paper, a comparison has been carried out between the results of the two Cosserat and classical models according to spinning condition on the wall. Using Laplace and Hankel transformations, we could analytically solve the pulsitive flow of Cosserat fluid.

**Keywords:** Cosserat Continous Model, Laplace and Hankel Transformations, Spinning Boundry Condition

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): atefi@iust.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری: maddah@iust.ac.ir

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد: alim5932@Gmail.com

## ۱- مقدمه

تئوری محیط پیوسته کسرات<sup>۱</sup> در سال ۱۹۰۹ توسط دو برادر با همین نام که دانشمندانی فرانسوی بودند مطرح [۱] و معادلات حاکم بر جریان آن با سه درجه آزادی اضافی نسبت به محیط پیوسته کوشی<sup>۲</sup> (کلاسیک) استخراج شد. بعد از آن در سال ۱۹۶۴ تئوری توسط ارینگن<sup>۳</sup> خطی سازی شده و تحت عنوان سیال ریزقطبی معرفی شد [۲]. ارینگن در مقالات خود به این مطلب اشاره کرد که خون رفتاری ریزقطبی دارد و لذا می توان از سیال پیوسته ریزقطبی برای بررسی جریان خون استفاده کرد. حال این سؤال مطرح می شود که: آیا حل تحلیلی جریان ضربانی ناپایدار سیال ریزقطبی برای استخراج خواص فیزیکی جریان مناسب است؟ اگر جواب مثبت است، کدام شرط مرزی جواب درستی برای این جریان می دهد؟

در کارهای انجام شده برای جریان ضربانی مورد بحث، شرط مرزی عدم چرخش<sup>۴</sup> استفاده شده است. اما بوگلیارلو<sup>۵</sup> [۳] نشان داد که سلول های قرمز خون در دیواره رگ می چرخند و ظاهراً سرعت چرخشی تابعی از سرعت بالک سیال (یعنی گرادیان فشار و قطر رگ)، لزجت پلازما و چگالی سلول های معلق می باشد. در مطالعه قبلی نیز، برای جریان پایدار، شرط مرزی دیریکله<sup>۶</sup> انتخاب شد [۴].

در این تحقیق جریان ضربانی خون، تحت مدل پیوسته کسرات با مدل کلاسیک این جریان مقایسه شده و شرط مرزی عدم لغزش<sup>۷</sup> برای سرعت و شرط مرزی چرخش روی دیواره ها نیز در نظر گرفته خواهد شد [۵]. بنابراین:

$$U(r,t) = 0 \quad \text{at} \quad r = R_0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) = 0 \quad \text{at} \quad r = R_0. \quad (2)$$

در بسیاری از مقالات، جریان ضربانی خون در مجاری تنگ شده با کمک سیالات غیرنیوتنی نظیر تابع نمایی شبیه سازی شده است [۶]، ولی می تواند به عنوان ادامه کار از مدل جریان ضربانی سیال کسرات، برای مدل کردن جریان در گرفتگی ها به منظور شناخت دقیق تر مشخصه های همودینامیکی استفاده شود.

استفاده از تبدیلات هانکل و لاپلاس برای حل جریان غیرپایدار معادلات کوپل شده سیال کسرات، ابتکاری است که اولین بار در این مقاله ارائه شده است.

## ۲- محیط پیوسته کسرات

در این محیط علاوه بر نیروها، اثر کوپل ها نیز بر یک المان مادی در نظر گرفته می شود. چنین محیطی به پیشنهاد ارینگن محیط ریزقطبی نامیده می شود. در این تئوری میدان برداری سرعت  $u$  و میدان برداری چرخش  $\omega$  دو کمیت سینماتیکی مستقل از هم هستند و در حالت کلی تانسورهای تنش نیرو و کوپل حاصله، نامتقارن می باشند.

در این مقاله، معادلات ساختاری سیالات ریزقطبی خطی برای توصیف رفتار مواد انتخاب شده و در شکل اندیسی به صورت زیر نشان داده خواهد شد:

$$t_{kl} = (-\pi + \lambda_v u_{r,r}) \delta_{kl} + \mu_v (u_{k,l} + u_{l,k}) + k_v (u_{l,k} - \varepsilon_{klr} \omega_r), \quad (3)$$

$$m_{kl} = \alpha_v \omega_{r,r} \delta_{kl} + \beta_v \omega_{k,l} + \gamma_v \omega_{l,k}. \quad (4)$$

قوانین بقای جرم و اندازه حرکت و اندازه حرکت خطی عبارتند از:

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot T + \rho k = \rho \dot{u}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot M + T \cdot \cdot E + \rho l = \rho j \dot{\omega}. \quad (7)$$

- 
- 1- Cosserat
  - 2- Couchy
  - 3- Eringen
  - 4- No-Spin
  - 5- Bugliarello
  - 6- Dirichlet
  - 7- No-Slip

برای حل این معادلات از آن‌ها نسبت به  $\tau$ ، تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود و با توجه به این‌که:

$$u^* \Big|_{\tau=0} = \omega^* \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (16)$$

خواهیم داشت:

$$\left[ k_1 \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d\bar{u}^*}{d\eta} \right) - A s \bar{u}^* \right] + \quad (17)$$

$$2k_2 \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \bar{\omega}^*) = -4 \left( \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{1+s^2} \right),$$

$$\left\{ k_3 \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \bar{\omega}^*) \right] - (4 + Bs) \bar{\omega}^* \right\} \quad (18)$$

$$-2 \frac{d\bar{u}^*}{d\eta} = 0,$$

$$\bar{u}^*(\eta, s) = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 1, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{\omega}^*) = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 1. \quad (20)$$

حال باید نسبت به  $\eta$  نیز تبدیل محدود هانکل<sup>۱</sup> گرفته شود. برای ساده‌سازی تبدیل از خواص زیر و خواص تابع بسل به صورت زیر استفاده شده است:

$$H_{n+1} \left\{ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} [\eta f'(\eta)] \right\} = -ak_i f(a) J'_n(ak_i) = \quad (21)$$

$$ak_i (-1)^n f(a) J_{n+1}(ak_i),$$

$$H_{n+1}(\bar{\omega}^*) - H_{n-1}(\bar{\omega}^*) = 2(-1)^n H_{n+1}(\bar{\omega}^*). \quad (22)$$

در معادله (۲۱)  $a=1$  و  $f(1)=0$  (شرط مرزی) می‌باشند. معادله تبدیل یافته برای سرعت عبارت است از:

$$\bar{u}^* = \frac{4 J_1(k)}{A k} \left( \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{1+s^2} \right) \frac{s+a}{(s-l_1)(s-l_2)}. \quad (23)$$

بعد از تبدیل معکوس گیری از روابط،  $\omega^*$  و  $u^*$  بدست می‌آیند. معادله دقیق پروفیل سرعت برابر است با:

$$\frac{a+l_2}{l_2} (e^{2\tau} - 1) - \frac{\varepsilon(a+l_1)}{1+l_1^2} (\cos \tau + l_1 \sin \tau - e^{l_1 \tau}) + \quad (24)$$

$$u^* = \frac{4}{A} \sum_i \frac{J_0(\eta k_i)}{k_i J_1(k_i)(l_1 - l_2)} \left[ \frac{a+l_1}{l_1} (e^{l_1 \tau} - 1) - \right.$$

برای رسیدن به حل ریاضی، رگ با یک لوله صلب دایروی بلند جایگزین می‌کنیم. معادلات ساده شده حاکم بر جریان ناپایدار برای ریزسیالات بدون هدایت حرارتی با نیروی حجمی و گشتاور حجمی صفر در دستگاه استوانه‌ای بصورت زیر است.

$$(\mu_v + k_v) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + k_v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega) \quad (8)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\gamma_v \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega) \right] - k_v \frac{\partial u}{\partial r} - 2k_v = \rho j \frac{\partial \omega}{\partial t}. \quad (9)$$

فرض می‌شود جریان محوری ناپایدار ناگهانی ایجاد شود و با یک گرادیان فشار محوری سینوسی شتاب بگیرد [۷].

$$P(t) = -\frac{\partial P}{\partial z} = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ P_m (1 + \varepsilon \sin \omega_0 t) & \text{for } t \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

با تعریف:

$$f(\tau) = \frac{P(t)}{P_m}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \eta = \frac{r}{R_0},$$

$$2\mu_s = 2\mu_v + k_v, u_c = \frac{P_m R_0^2}{4\mu_s}, k_1 = \frac{2\mu_s + k_v}{\mu_s}, \quad (11)$$

$$k_2 = \frac{k_v}{2\mu_s}, k_3 = \frac{2\gamma_v}{R_0^2 k_v}, A = \frac{\rho \omega_0 R_0^2}{\mu_s},$$

$$B = \frac{2\rho j \omega_0}{k_v}, \omega^* = \frac{\omega R_0}{u_c}, u^* = \frac{u}{u_c},$$

معادلات و شرایط مرزی حاکم به صورت زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\left[ k_1 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) - A \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right] + \quad (12)$$

$$2k_2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \omega^*) = -4f(\tau),$$

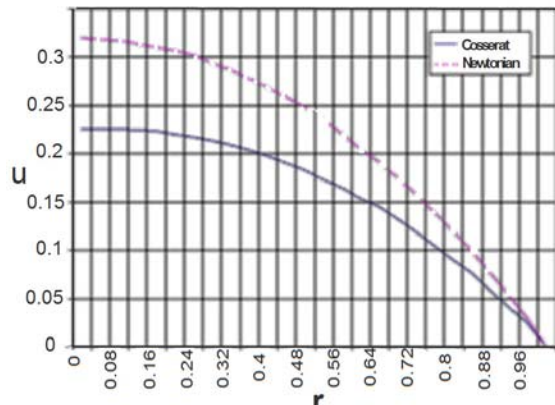
$$\left\{ k_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \omega^*) \right] - 4\omega^* - B \frac{\partial \omega^*}{\partial \tau} \right\} \quad (13)$$

$$-2 \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = 0,$$

$$u^*(\eta, \tau) = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 1, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \omega^*) = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 1. \quad (15)$$

معادلات  $u_c = 2.675 \text{ ms}^{-1}$  فرض شده است و در هر دو لزجت سینماتیکی  $\nu = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  و گرادیان فشار بی بعد  $P(t) = 1 + 0.5 \sin \Omega t$  می باشد. که این حل ها با فرض  $\Omega t = \pi$  (عدد استروهال  $\Omega R_0 / u_c = \pi$ ) انجام شده اند.



شکل (۱): مقایسه حل به کمک تبدیلات لاپلاس و هانکل برای محیط پیوسته کلاسیک و کسرات.

#### ۵- مقایسه و نتیجه گیری

پروفیل سرعت رسم شده برای جریان نوسانی سیال کسرات، پروفیل سرعتی پخش شده<sup>۱</sup> می باشد. مقایسه نتایج بدست آمده و مطالعات انجام شده برای جریان خون در رگ های کوچک درستی نتایج مقاله حاضر را تأیید می کند. با بررسی و مقایسه دقیق تر معادلات نهایی استخراج شده برای پروفیل سرعت تحت محیط پیوسته کلاسیک و کسرات این نتیجه حاصل می شود که، با افزایش رینولدز جواب های جریان سیال نیوتنی به جریان سیال تحت محیط پیوسته کسرات نزدیک می شوند. این نتیجه دیگری است که از جریان پایدار نیز بدست آمده است. با توجه به اینکه پروفیل سرعت برای جریان خون در آئورت که با رینولدزهای بالاتری همراه است، به پروفیل سرعت جریان سیال نیوتنی کلاسیک نزدیکتر است. بنابراین، می توان از تئوری محیط پیوسته کسرات برای مدل سازی جریان خون در رگ در تمامی رینولدزها استفاده نمود.

$$\left. \frac{\varepsilon(a + l_2)}{1 + l_2^2} (\cos \tau + l_2 \sin \tau - e^{l_2 \tau}) \right].$$

#### ۳- محیط پیوسته کلاسیک

معادلات اصلی بی بعد جریان ضربانی برای محیط پیوسته کلاسیک معادله پیوستگی و معادلات زیر با همان تعریف قبلی برای گرادیان فشار می باشد.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (25)$$

با شرط مرزی عدم لغزش روی دیواره و همچنین، با در نظر گرفتن موارد زیر:

$$f(\tau) = \frac{P(t)}{P_m}, \eta = \frac{r}{R_0}, \tau = \omega_0 t, \quad (26)$$

$$u^* = \frac{u}{u_c}, u_c = \frac{P_m R_0^2}{4\mu_s},$$

معادله بی بعد می شود. بنابراین:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) - A \frac{\partial u^*}{\partial \tau} = -4f(\tau). \quad (27)$$

با تبدیل لاپلاس از معادله (۲۷) به دست می آید:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \eta} \right) - A s \bar{u}^* = -4 \left( \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{1+s^2} \right). \quad (28)$$

با کمک رابطه (۲۱)، از رابطه (۲۸) تبدیل هانکل گرفته می شود. بنابراین، جمله اول از سمت چپ صفر می شود.

$$\bar{u}^* = \frac{4}{A k_i} J_{n+1}(k_i) \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{1+s^2} \right). \quad (29)$$

اکنون، با تبدیلات معکوس  $u^*$  را می یابیم.

$$u^* = \frac{8}{A} \sum_i \frac{J_0(\eta k_i)}{k_i J_1(k_i)} [\tau + \varepsilon(1 - \cos \tau)]. \quad (30)$$

#### ۴- نتایج

برای مقایسه مدل های کلاسیک و کسرات، پروفیل سرعت جریان ضربانی خون داخل رگ در شکل ۱ رسم شده است. شعاع رگ  $R_0 = 1500 \mu\text{m}$  و سرعت جهت بی بعدسازی

برای جریان پایدار نیز اثبات شده است که رینولدزهای پائین دلیل بسیار مناسبی در انتخاب محیط پیوسته کسرات برای حل دقیق جریان می‌باشند و حجم محاسبات آنقدر کم است که نیازی به حل تقریبی معادلات ساختاری پیچیده برای خون نظیر اولدروید<sup>۱</sup> با لزجت متغیر نمی‌باشد؛ چون ثابت شده است که خطا در نتایج از یک مرتبه<sup>۲</sup> می‌باشد.

## مراجع

1. Cosserat, E. and Cosserat, F., "Théorie des Corps Déformables", Hermann, A. et fils, Paris, 1909.
2. Eringen, C.A., "Simple Microfluids", Int. J. Eng. Sci, Vol. 2, Issue 2, pp. 205-217, 1964.
3. Bugliarello, G. and Sevilla, J., "Velocity Distribution and other Characteristics of Steady and Pulsatile Blood Flow in Fine Glass Tubes", Biorheology, Vol. 7, No. 2, pp. 85-107, 1970.
۴. عاطفی، غ. و مداح، س. "تعمیم تئوری مواد غیرمحلّی درجه دوم بر مبنای مدل پیوسته کلاسیک و مواد محلّی مرتبه دوم بر مبنای مدل پیوسته کسرات برای تحلیل جریان خون در رگ"، شانزدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، ایران، کرمان، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۶.
5. Chakraborty, D. and Chakraborty, S., "Thermal Transport of Fluid Containing Homogeneous Microstructures", Int. J. Thermal Sciences, Vol. 48, No. 7, pp. 1259-1264, 2009.
۶. مدرس رضوی، م. ر.، سیدین، ح. و باشی شهابی، پ. "مطالعه دینامیک جریان ضربانی خون در مجاری تنگ‌شده"، نشریه بین-المللی علوم مهندسی، دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، ص.ص. ۱-۱۲، ۱۳۸۷.
7. Sevilla, J., "Detailed Characteristics of Pulsatile Blood Flow in Small Glass Capillaries", Ph.D. Dissertation, Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A, 1968.
۸. مداح، س.، "حل تحلیلی جریان دائم خون در رگ با دیواره صلب به کمک مدل پیوسته کسرات"، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۷.