

# تحلیل خمش ورق در فرآیند خم کاری پیوسته روی بستر لاستیکی

محمود مهرآرا<sup>۱</sup> و محمدجواد ناطق<sup>۲</sup>

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۸۹/۸/۴؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۲/۲۳)

## چکیده

خمش ورق فلزی روی بستر لاستیکی یکی از فرآیندهای نسبتاً جدید خمش پروفیل‌ها و ورق‌های نازک فلزی است که در سال‌های اخیر در حد وسیعی مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق، خمش الاستیک ورق نازک فلزی روی یک بستر لاستیکی تحلیل شده است. پس از استخراج معادله حاکم بر این فرآیند در تغییر شکل الاستیک ورق و حل تحلیلی آن، عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق بر حسب پارامترهای ورودی فرآیند تعیین شده‌اند. همچنین، حل عددی معادله حاکم بر فرآیند به روش تفاضل محدود نیز انجام شده و نتایج دو روش با هم مقایسه شده‌اند. علاوه بر این، با اجرای چند آزمایش و تعیین عمق نفوذ آستانه تسلیم چند نمونه ورق فولادی، معادله دیفرانسیل استخراج شده برای فرآیند و جواب معادلات به دست آمده برای آن، مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** خمش، ورق، بستر لاستیکی، الاستیک

## Analysis of Continuous Sheet Bending on Elastic Foundation

M. Mehrara and M.J. Nategh

Mech. Eng. Dep't.

Tarbiat Modarres Univ.

(Received: 26 Oct., 2010; Accepted: 14 March, 2011)

### ABSTRACT

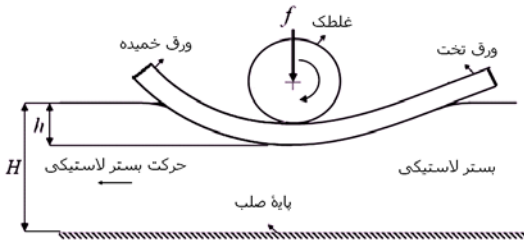
In this work, the bending of a sheet on elastic pad has been analyzed. The governing equations for bending of plate were derived and analytically solved. A formulation was derived for the indentation depth at which the plastic deformation of the sheet initiates. The equations were also numerically solved using finite difference method to verify the analytic solution. Additionally, some experiments were performed to verify these results.

**Keywords:** Bending, Sheet, Elastic, Elastic Foundation

۱- دانشجوی دکتری: mdmehrara@gmail.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): nategh@modares.ac.ir

است که در سال‌های اخیر برای خم کاری ورق‌های نازک فلزی ابداع شده و مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. این فرآیند به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. بر خلاف روش‌های معمول سه غلتکی و چهار غلتکی خم کاری ورق، در طی این فرآیند ورق نازک فلزی به کمک یک غلتک فولادی بر روی یک بستر لاستیکی به ضخامت  $H$  که به صورت یک بستر تخت است، تا عمق نفوذ به میزان  $h$  فشرده می‌شود و در اثر این عمل و انعطاف پذیری بالای بستر لاستیکی، یک بار گسترده به صورت توزیع فشار بر روی ورق ایجاد و سبب تغییر شکل خمشی ورق می‌شود و با عبور از بین غلتک و بستر لاستیکی به صورت گرد شده خارج می‌شود. در این فرآیند به جای بستر تخت ممکن است یک غلتک فلزی با روکش لاستیکی استفاده شود. نسبت  $h/H$  در این فرآیند کوچک بوده و در نتیجه، کرنش ایجاد شده در لاستیک در محدوده کرنش کوچک می‌باشد.



شکل (۱): فرآیند خمش ورق بر روی یک بستر

لاستیکی تخت به صورت شماتیک.

یانگ و شیمان<sup>۱</sup> (۱۹۸۸) خمش ورق در فرآیند خم کاری سه غلتکی را شبیه‌سازی کردند [۱]. یانگ<sup>۲</sup> و همکارانش (۱۹۹۴) خمش ورق را در فرآیند خم کاری سه غلتکی شبیه‌سازی و تعداد مرحله‌های خم کاری را برای رسیدن به شعاع مطلوب بدون ایجاد لغزش بین غلتک و ورق تعیین کردند [۲]. گاندهی<sup>۳</sup> و راول<sup>۴</sup> (۲۰۰۸) به صورت تحلیلی و تجربی رابطه بین موقعیت غلتک و شعاع خمش را در فرآیند خم کاری سه غلتکی بررسی کرده‌اند [۳]. هاو<sup>۵</sup> و همکارانش (۱۹۹۹) اصول

## فهرست علائم و اختصارات

$a$	طول ورق mm
$b$	عرض ورق mm
$C_n$	ثابت انتگرال گیری $n = 1 - 4$
$\bar{C}_n$	ثابت انتگرال گیری نرمال $n = 1 - 4$
$D$	سفتی خمشی N-mm
$E$	مدول الاستیسیته MPa
$E_R$	مدول الاستیسیته بستر MPa
$E_S$	مدول الاستیسیته ورق فلزی MPa
$f$	نیروی نفوذ بر واحد عرض ورق N/mm
$H$	ضخامت بستر mm
$h$	عمق نفوذ mm
$k$	مدول سفتی بستر MPa/mm
$m$	ممان خمشی بر واحد عرض ورق (N)
$\bar{m}(r)$	ممان خمشی نرمال
$p_z$	بار جانبی N/mm <sup>2</sup>
$p_z^*$	عکس العمل بستر N/mm <sup>2</sup>
$\bar{p}_z^*(r)$	عکس العمل نرمال بستر
$q$	نیروی برش بر واحد عرض ورق N/mm
$\bar{q}(r)$	نیروی برش نرمال
$r$	موقعیت نرمال در راستای X
$r_c$	موقعیت جدایش ورق از بستر
$S$	تنش مهندسی MPa
$t$	ضخامت ورق mm
$w$	خیز ورق mm
$\bar{w}(r)$	خیز نرمال
$x_c$	طول ناحیه تماس ورق با بستر mm

## علائم یونانی

$\alpha$	پارامتر خمش 1/mm
$\varepsilon$	کرنش مهندسی
$\nu$	ضریب پواسون

## مقدمه

فرآیند خم کاری ورق نازک فلزی بر روی بستر لاستیکی در میان فرآیندهای خم کاری دوار غلتکی روش نسبتاً جدیدی

1- Shima  
2- Yang  
3- Gandhi  
4- Raval  
5- Hua

بررسی قرار داده و جواب دقیقی برای آن ارائه کرده‌اند [۱۱]. ادیب نظری و همکارانش (۲۰۰۷) مسئله تماس یک سمبه V شکل صلب را در یک محیط الاستیک نیم صفحه مورد به روش ریاضی و المان‌های محدود FEM مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۲]. همچنین، تحقیقات متعددی برای بررسی مسائل ورق بر روی پی الاستیک منتشر شده است که کم و بیش با مبحث مورد نظر ارتباط دارد. سیلوا<sup>۱</sup> و همکارانش (۱۹۹۹) مسئله ورق بر روی یک پی الاستیک فاقد کشش را به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند [۱۳]. کوکرتی<sup>۱۱</sup> و کو<sup>۱۲</sup> (۱۹۹۲) رفتار خمشی یک ورق مستطیلی را بر روی یک پی الاستیک تحت یک توزیع بار یکنواخت با استفاده از روش انرژی مورد مطالعه قرار دادند [۱۴].

با بررسی پیشینه تحقیقات منتشر شده برای فرآیند خمش ورق نازک فلزی بر روی یک بستر لاستیکی و موضوعاتی که به نحوی به این فرآیند مربوط می‌شود می‌توان دریافت که جای خالی تحقیقی که این فرآیند را به صورت تحلیلی و ریاضی مورد مطالعه قرار داده باشد، کاملاً مشهود است. در این تحقیق، تحلیل ریاضی این فرآیند برای اولین بار مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در این فرآیند دو ناحیه تغییر شکل در ورق ایجاد می‌شود که عبارتند از ناحیه تغییر شکل الاستیک و ناحیه تغییر شکل پلاستیک. در این تحقیق، معادله دیفرانسیل حاکم بر ناحیه تغییر شکل الاستیک ورق در فرآیند به عنوان مرحله اول و کلیدی تحلیل کامل فرآیند استخراج شده و با حل آن، جواب دقیق برای معادلات خیز، ممان خمشی و نیروی برشی ورق و بار جانبی وارد بر ورق و مقدار عمق نفوذ آغاز تغییر شکل پلاستیک ورق بر حسب پارامترهای فرآیند به دست آمده است. اهمیت دیگر این تحقیق از آن جهت است که در این مرحله، علاوه بر دستیابی به نتایج فوق، از یافته‌های آن در تحلیل کامل الاستیک-پلاستیک مسئله استفاده می‌شود. تحلیل ارائه شده برای فرآیند خم کاری دوار بر روی بستر لاستیکی، اولین کاری است که در بررسی تحلیلی این فرآیند ارائه می‌شود. علاوه بر این، با استفاده از روش حل مسئله برای ناحیه تغییر

کار و مکانیزم فرآیند خم کاری چهار غلتکی را تشریح کرده‌اند [۴]. هاو و لین<sup>۱</sup> (۱۹۹۹) و لین و هاو (۲۰۰۰) خمش ورق را در فرآیند خم کاری چهار غلتکی تحلیل و اثر کرنش سختی را هم بررسی کرده‌اند [۵-۶]. ولرتسن<sup>۲</sup> و همکارانش (۱۹۹۹) در مروری بر انواع روش‌های خمش پروفیل‌های فلزی، روش خم کاری غلتکی بر روی بستر لاستیکی را معرفی و بدون ارائه هیچ گونه تحلیلی برای فرآیند، به اثر بعضی پارامترهای فرآیند از جمله عمق نفوذ غلتک در انحنای نهایی محصول اشاره کرده‌اند [۷]. کاون<sup>۳</sup> و همکارانش در سال (۲۰۰۱) خمش غلتکی یک پروفیل آلومینیومی از جنس آلومینیوم AA6061-T6، را بر روی یک بستر لاستیکی مورد بررسی تجربی قرار داده و اثر میزان نفوذ غلتک شکل دهی را بر روی شعاع انحنای نهایی خمش محصول تعیین کردند [۸]. لی<sup>۴</sup> و همکارانش (۲۰۰۳) علاوه بر بررسی تجربی خمش غلتکی یک پروفیل قوطی ساده از جنس آلومینیوم AA6061، بر روی بستر لاستیکی و تعیین نتایج آن، فرآیند را به روش اجزاء محدود شبیه سازی و نتایج دو روش را با یکدیگر مقایسه کرده‌اند [۹]. گیگر<sup>۵</sup> و همکارانش (۲۰۰۳) خمش ورق‌های به شکل U را با استفاده از یک سمبه صلب و ماتریس لاستیکی به روش المان‌های محدود (FEM) شبیه سازی نموده و مورد بررسی قرار دادند [۱۰].

حل مسئله حاضر به دلیل تماس و تعامل ورق با یک بستر لاستیکی به نحوی می‌تواند به مسائل تماس<sup>۶</sup> و مسائل نفوذ<sup>۷</sup> مربوط شود. اما نوعاً در مسائل تماس و نفوذ، دو جسم الاستیک توپر با یکدیگر تماس حاصل کرده و در یکدیگر نفوذ می‌کنند که به عنوان مثال می‌توان به تئوری تماس هرتز اشاره نمود؛ یا نفوذ جسم صلب با شکل‌های مختلف در یک محیط الاستیک مطرح است.

ژوپنسکا<sup>۸</sup> و اولیتکو<sup>۹</sup> (۲۰۰۵) مسئله تماس یک سمبه استوانه‌ای صلب را با یک محیط الاستیک نیم صفحه مورد

- 
- 1- Lin
  - 2- Vollertsen
  - 3- Kwon
  - 4- Lee
  - 5- Geiger
  - 6- Contact Problem
  - 7- Indentation Problem
  - 8- Zhupanska

- 
- 9- Ulitko
  - 10- Silva
  - 11- Kukreti
  - 12- Ko

مبحث مدل‌های متعددی برای پیش بینی نحوه تعامل ورق و بستر الاستیک مطرح شده است. کاربرد این مسائل عمدتاً در تحلیل تغییر شکل کف جاده‌های از جنس بتون مسلح، باند فرودگاه‌ها و باریکه‌های فونداسیون ساختمان‌ها می‌باشد که بر روی بستری از خاک و گل قرار گرفته‌اند. در اثر تعامل بین آن‌ها، توزیع فشاری ایجاد می‌شود که سبب ایجاد تغییر شکل در آن‌ها می‌گردد [۱۷]. مدل‌های متعدد یک، دو و سه پارامتری برای این منظور پیشنهاد شده‌اند که ساده‌ترین آن‌ها، مدل تک پارامتری وینکلر<sup>۵</sup> می‌باشد. این مدل، بر فرض رفتار الاستیک خطی پی استوار است و فرض می‌شود که متشکل از تعدادی فنر خطی عمودی مجاور هم باشد که به صورت مستقل از هم در مقابل جابه‌جایی عمودی سطح فوقانی بستر از خود مقاومت نشان می‌دهند. در این مدل، مقاومت بستر متناسب با تغییر شکل عمودی سطح فوقانی آن است [۱۷-۱۵].

با توجه به اینکه در این فرآیند، تغییر شکل الاستیک در محدوده کرنش کوچک می‌باشد و از طرفی بر اساس آن چه در بالا اشاره شد لاستیک در این محدوده رفتار خطی از خود نشان می‌دهد، بهتر است مدلی را برای تعامل ورق و بستر لاستیکی فرض کرد که با رفتار الاستیک خطی لاستیک سازگار باشد. بنا بر این، در این تحقیق برای اولین بار در تحلیل این فرآیند، با تلفیق تئوری کلاسیک کروشف، معادلات الاستیک خطی برای رفتار لاستیک و مدلی فرضی برای تعامل ورق و بستر لاستیکی معادلاتی برای فرآیند استخراج می‌شود که به صورت ریاضی تغییر شکل ورق را به پارامترهای فرآیند مربوط می‌کند.

با پیشروی غلتک به سمت بستر، غلتک به ورق نیرو وارد می‌کند و آن را به سمت بستر لاستیکی می‌راند. به دلیل موازی بودن محور غلتک با سطح بستر لاستیکی، بر اساس مدل وینکلر، توزیع باری مطابق با شکل ۲ که در راستای  $y$  یکنواخت می‌باشد بر روی ورق ایجاد می‌شود. در این شکل  $a$ ،  $b$  و  $w$  به ترتیب طول، عرض و خیز عمودی سطح میانی ورق و  $f$  نیروی وارد از جانب غلتک بر واحد عرض ورق می‌باشد. عکس العمل بستر نیز با  $p_z^*(x)$  نشان داده می‌شود.

شکل الاستیک و نتایج آن، راه برای تحلیل کامل فرآیند و بهره‌گیری از نتایج آن در کنترل و پیش بینی پارامترهای فرآیند هموار می‌شود.

## ۱- تئوری

مدل‌سازی رفتار مکانیکی ورق، بستر و تعامل آن‌ها با یکدیگر سه قدم اساسی در تحلیل رفتار مکانیکی ورق در سیستم ورق-بستر می‌باشد.

بررسی تئوری ورق‌ها نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک کروشف در خمش ورق‌ها، یک تئوری کاملاً معتبر و پذیرفته شده در تحلیل خمش الاستیک ورق‌های نازک فلزی است و می‌تواند به عنوان مدل رفتار مکانیکی ورق نازک به خوبی مورد استفاده قرار گیرد [۱۷-۱۵].

مطالعه رفتار ماده لاستیک‌ها در مبحث الاستومر که شاخه‌ای از علوم مهندسی پلیمر است نشان می‌دهد که لاستیک‌ها در زمره مواد با حد کشسانی<sup>۱</sup> بالا قرار دارند و مبحث فوق کشسانی<sup>۲</sup> رفتار آن‌ها را در محدوده کشسانی تبیین می‌کند، اما در محدوده تغییر شکل‌های کوچک، رفتاری الاستیک و تقریباً خطی از خود نشان می‌دهند. بنابراین معادلات الاستیسیته خطی<sup>۳</sup> برای این ماده قابل استفاده است [۱۸]. بنابراین می‌توان رفتارهای تغییر شکلی بستر لاستیکی در این فرآیند را به کمک معادلات الاستیسیته مدل‌سازی کرد.

تعامل ورق و بستر لاستیکی، توزیعی از بار فشاری جانبی بر روی ورق ایجاد می‌کند که سبب خمش ورق می‌شود. مشکلات اصلی تحلیل تغییر شکل ورق در این فرآیند، از یک طرف نامعلوم بودن توزیع فشار وارد بر ورق از جانب بستر و از طرف دیگر نا معین بودن طول ناحیه تماس است که در استفاده از شرایط مرزی کار را مشکل می‌کند. انتخاب مدل مناسب برای پیش بینی نحوه توزیع فشار، نکته کلیدی حل مسئله می‌باشد.

مبحث تئوری پی<sup>۴</sup> در مهندسی عمران به مسائل تغییر شکل الاستیک ورق‌ها بر روی پی الاستیک<sup>۵</sup> می‌پردازد. در این

1 - Hyper-elastic Material

2 - Hyperelasticity

3 - Linearelasticity

4 - Foundation

5 - Elastic Foundation

6 - Winkler Model

که در آن،  $k$  مدول بستر، فشار مورد نیاز برای جابه‌جایی واحد طول بستر بر حسب (Mpa /mm) می‌باشد. با فرض رفتار الاستیک خطی برای لاستیک، برای هر المان بستر لاستیکی در مدل وینکلر، مدول بستر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k = E_R / H. \quad (۶)$$

با افزودن عکس‌العمل بستر لاستیکی ناشی از تعامل ورق و بستر از معادله (۵) به بار جانبی در معادله (۱)، معادله حاکم بر سیستم ورق-بستر لاستیکی به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{p_z(x) - k w(x)}{D}. \quad (۷)$$

در این فرآیند، در تمامی نواحی تماس به استثناء موقعیتی درست واقع در زیر مرکز غلتک که خط تماس ورق و غلتک می‌باشد، بار جانبی وارد بر ورق تنها عکس‌العمل بستر می‌باشد. در نتیجه معادله فوق برای ناحیه‌ای که خط تماس در آن ناحیه قرار نگیرد، ساده‌تر شده و معادله دیفرانسیل حاکم بر این فرآیند، به شکل زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{k w(x)}{D} = 0. \quad (۸)$$

اگرچه به دلیل شباهتی که شکل معادله دیفرانسیل حاکم استخراج شده فوق برای مسئله حاضر، با معادله دیفرانسیل موجود در تئوری ورقه‌ها بر روی پی الاستیک مشابهت دارد، اما استخراج و انتساب این معادله به این فرآیند که متشکل از سیستم ورق - بستر لاستیکی می‌باشد و پس از طی مراحل تحقیق ذکر شده در بالا و بر اساس نتیجه‌گیری منطقی و علمی محقق شده است، یافته‌ای کاملاً جدید بوده و در این تحقیق انجام شده است.

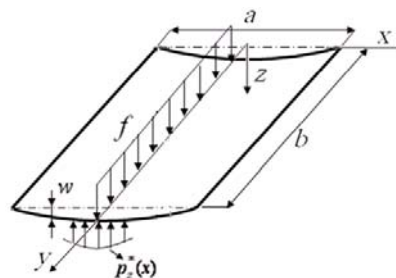
حل معادله دیفرانسیل فوق جواب زیر را می‌دهد:

$$w(x) = \left[ e^{-\alpha \cdot x} (C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) + e^{\alpha \cdot x} (C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) \right]. \quad (۹)$$

معادلات شیب، ممان خمشی، نیروی برشی و بار جانبی ورق به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{d}{dx} w(x) = \alpha \left[ e^{-\alpha \cdot x} ((-C_1 + C_2) \cdot \cos(\alpha \cdot x) - (C_1 + C_2) \cdot \sin(\alpha \cdot x)) \right]$$

در این فرآیند، بار جانبی وارد بر ورق از سوی بستر فقط از نوع فشاری می‌باشد و نمی‌توان بار کششی بر آن وارد نمود.



شکل (۲): توزیع بار جانبی در بار گذاری ورق بر روی بستر الاستیک.

معادلات حاکم برای خمش الاستیک ورق تحت توزیع بار جانبی  $p_z(x)$  از تئوری کلاسیک خمش کروشف به صورت زیر به دست می‌آید [۱۷-۱۵]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_z(x)}{D}, \quad (۱)$$

$$m(x) = -D \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad (۲)$$

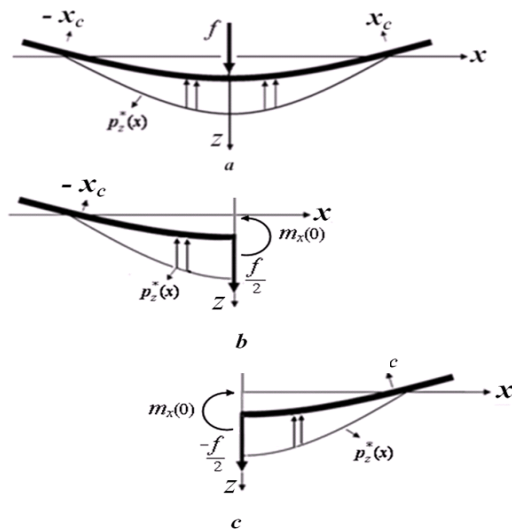
$$q = -D \frac{d^3 w(x)}{dx^3}, \quad (۳)$$

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (۴)$$

در این معادلات،  $w(x)$  خیز سطح میانی ورق،  $p_z(x)$  توزیع بار جانبی،  $q$  نیروی برشی و  $D$  سفتی خمشی ورق و  $t$  ضخامت ورق می‌باشند. اگرچه مدول وینکلر برای تعامل بسترهای از جنس خاک و گل پیشنهاد شده، ولی به دلیل این که این مدول با فرض رفتار خطی برای این بسترها استخراج شده و از طرفی بستر لاستیکی از این جهت با ویژگی فرض شده برای بسترهای خاکی و گلی در تغییر شکل‌های کوچک مشابهت دارد، بنا بر این برای اولین سعی در مدل کردن تعامل بین ورق و بستر لاستیکی در این فرآیند، فرض می‌شود که عکس‌العمل بستر لاستیکی بر روی ورق در تعامل بین ورق و بستر لاستیکی در این فرآیند بر اساس معادله زیر تعیین شود:

$$p_z^*(x) = -k w. \quad (۵)$$

این دو حالت، فرآیند وضعیت دائم دارد. خمش پیوسته ورق در این فرآیند به این معنی در نظر گرفته می‌شود که ابتدا و انتهای ورق از بستر لاستیکی جدا بوده و فرآیند در یک حالت دائم در جریان باشد. در این صورت، وضعیت و شرایط مرزی در معادلات خمش ورق با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. معادلات (۹-۱۳) با فرض این که بار جانبی فقط عکس‌العمل بستر بوده و در همچنین با فرض وجود بار جانبی خارجی به دست آمده‌اند. بنا بر این برای تمام طول ورق در یک مرحله قابل استفاده نمی‌باشد زیرا یک بار جانبی متمرکز در مرکز که همان نیروی نفوذ است بر روی ورق اعمال شده است. اگر ورق به دو نیمه راست و چپ تقسیم شود، بار جانبی وارد بر هر یک از آن‌ها تنها عکس‌العمل بستر بوده و نیروی نفوذ، به شرط مرزی تبدیل می‌شود. با فرض خمش پیوسته ورق، تقسیم ورق به دو نیمه راست و چپ در شکل ۳ مشاهده می‌شود. با این روش معادلات (۹-۱۳) برای هر کدام از دو نیمه ورق قابل استفاده می‌باشند.



شکل (۳): (a) ورق کامل تحت بار؛ (b) نیمه راست ورق؛ (c) نیمه چپ ورق.

در این شکل،  $x_c$  موقعیت جدایی ورق از بستر است. شرایط مرزی برای نیمه‌های راست و چپ ورق را به ترتیب به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$+ e^{\alpha x} \left[ (C_3 + C_4) \cdot \cos(\alpha \cdot x) - (C_3 - C_4) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right], \quad (10)$$

$$m(x) = -D \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -2D \alpha^2 \times \left[ e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) - e^{\alpha x} (C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) \right], \quad (11)$$

$$q(x) = -D \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -2D \alpha^3 \left[ e^{-\alpha x} \left[ (C_1 + C_2) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + (C_2 - C_1) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right] + e^{\alpha x} \left[ (C_4 - C_3) \cos(\alpha \cdot x) - (C_3 + C_4) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right] \right], \quad (12)$$

$$p_z^*(x) = D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -4D \alpha^4 \left[ e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) + e^{\alpha x} (C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) \right], \quad (13)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (14)$$

در این معادلات،  $m$  ممان خمشی بر واحد عرض ورق،  $q$  نیروی برشی بر واحد عرض ورق،  $D$  سفتی خمشی و  $t$  ضخامت ورق می‌باشند.

$$\alpha = \left( \frac{k}{4D} \right)^{1/4}. \quad (15)$$

که در آن،  $\alpha$  پارامتر خمش می‌باشد.

در مرحله اولیه فرآیند و شروع خمش، ورق از زیر غلتک عبور کرده و تماس آن با بستر لاستیکی آغاز می‌شود. این مرحله، تا زمان جدا شدن ابتدای ورق از بستر ادامه می‌یابد. در مرحله نهایی فرآیند و اتمام خمش، تماس انتهای ورق با بستر لاستیکی شروع می‌شود. این مرحله تا پایان خمش که انتهای ورق از زیر غلتک خارج می‌شود ادامه می‌یابد. در این دو مرحله، فرآیند غیر دائم است. یعنی با گذشت زمان، وضعیت خمش ورق و شرایط مرزی آن تغییر می‌کند. در بین

ورق می‌باشند و به همین دلیل دائماً در حال تغییر هستند. با توضیحی که داده شد اگر روش حل معادلات فوق به صورت عددی باشد با ایجاد هر تغییر در مقادیر هر یک از پارامترهای فوق روند حل عددی دستگاه فوق باید تکرار شود که در عمل، استفاده از نتایج تحلیل را بسیار مشکل می‌کند. برای رفع این مشکل، روشی ابتکاری برای حل معادله دیفرانسیل حاکم اتخاذ شده که منجر به تعیین مقادیری عمومی برای ثابت‌های انتگرال‌گیری در معادلات جواب شده است و فرد را از تکرار حل عددی معادلات حاکم به ازای هرگونه تغییر در پارامترهای ورودی فرآیند بی‌نیاز می‌کند. این روش ابتکاری در حل مسئله، کاری کاملاً نو است که در این تحقیق ارائه شده و تحقیقاً در هیچ یک از متون متعدد مربوط به مباحث مربوطه و حتی در مقالات متعدد و متنوع منتشر شده در این حوزه‌ها سابقه ندارد و از نقاط قوت این تحقیق می‌باشد. این روش حل دارای ارزش بسیار بالایی می‌باشد. زیرا نتیجه حل مسئله، ارائه معادله جواب دقیقی با ثابت‌های انتگرال‌گیری معلوم و بر حسب پارامترهای فرآیند می‌باشد. بدون استفاده از روش حل ارائه شده، اولاً حل مسئله صرفاً به روش عددی میسر است و ثانیاً در صورت ایجاد هرگونه تغییر در ورودی‌های مسئله، به دلیل تغییر در شرایط مرزی مسئله، حل عددی معادلات برای تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری باید تکرار شود که کار را بسیار دشوار می‌کند.

برای حصول این هدف، با استفاده از روش نرمال کردن، معادلات دستگاه فوق از پارامترهای فرآیند مستقل شده و پارامترهای نرمال به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \alpha \cdot x, \\ \bar{w}(r) = w(x)/(f/2D\alpha^3), \\ \frac{d}{dx} \bar{w}(r) = \frac{d}{dx} w(x)/(f/2D\alpha^2), \\ \bar{m}_x(r) = m_x(x)/(f/2\alpha), \\ \bar{q}_x(r) = q_x(x)/(f/2), \\ \bar{p}_z^*(r) = p_z^*(x)/(\alpha f/2), \\ \bar{C}_n = \frac{C_n}{(f/2D\alpha^3)}, \\ C_n = (f/2D\alpha^3)\bar{C}_n, \quad n=1-4. \end{array} \right. \quad (20)$$

که در آن،  $r$ ،  $\bar{w}(r)$ ،  $\bar{m}_x(r)$ ،  $\bar{q}_x(r)$ ،  $\bar{p}_z^*(r)$  و  $\bar{C}_n$  به ترتیب موقعیت، خیز، ممان خمشی، نیروی برشی،

$$\begin{aligned} q(0) &= -f/2, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad m(x_c) = 0, \\ q(x_c) &= 0, \quad p_z^*(x_c) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} q(0) &= f/2, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad m(-x_c) = 0, \\ q(-x_c) &= 0, \quad p_z^*(-x_c) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق در معادلات (۱۳-۱۰) یک دستگاه معادلات غیر خطی با پنج معادله و پنج مجهول  $C_1$  تا  $C_4$  و  $x_c$  برای نیمه راست ورق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a) \quad & C_1 - C_2 - C_3 - C_4 = 0, \\ b) \quad & -2D\alpha^3[(C_1 + C_2) \\ & + (C_4 - C_3)] = -f/2, \\ c) \quad & e^{-\alpha x_c} [C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x_c) \\ & - C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x_c)] \\ & - e^{\alpha x_c} [C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x_c) \\ & - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x_c)] = 0, \\ d) \quad & e^{-\alpha x_c} [(C_1 + C_2) \cdot \cos(\alpha \cdot x_c) \\ & + (C_2 - C_1) \cdot \sin(\alpha \cdot x_c)] \\ & + e^{\alpha x_c} [(C_4 - C_3) \cos(\alpha \cdot x_c) \\ & - (C_3 + C_4) \cdot \sin(\alpha \cdot x_c)] = 0, \\ e) \quad & e^{-\alpha x_c} [C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x_c) \\ & + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x_c)] \\ & + e^{\alpha x_c} [C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x_c) \\ & + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x_c)] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

دستگاه معادلات مشابه برای نیمه چپ ورق همان دستگاه فوق می‌باشد با این تفاوت که معادله دوم آن باید با معادله زیر جایگزین شود:

$$-2D\alpha^3((C_1 + C_2) + (C_4 - C_3)) = f/2. \quad (19)$$

دستگاه فوق غیرخطی بوده و منجر به جواب تحلیلی نمی‌شود؛ بنا بر این باید به صورت عددی حل شود. البته جواب ناشی از حل عددی مسئله، اختصاص به مقادیر معینی از پارامترهای فرآیند مانند  $D$ ،  $\alpha$  و  $f$  دارد و برای هر مقداری از این پارامترها عمومیت ندارد. این پارامترها تعیین کننده هندسه و مشخصات مکانیکی ورق و بستر و بارگذاری بر روی

با تعیین  $C_n$  از معادله آخر معادلات (۲۰) و ردیف اول جدول ۱ برای نیمه راست ورق و جایگذاری در معادله (۹)، معادله خیز ورق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w(x)_r = \frac{f}{D\alpha^3} \times \left[ 0.130645 \cdot e^{-\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) + \sin(\alpha \cdot x)) + 0.005645 \cdot e^{\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) - \sin(\alpha \cdot x)) \right] \quad (22)$$

با قرار دادن  $x = 0$  و در نظر گرفتن  $w(0) = h$  در معادله فوق، رابطه بین عمق نفوذ و نیروی نفوذ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f = 7.33721868 h D \alpha^3 \quad (23)$$

با قرار دادن سمت راست معادله فوق به جای  $f$  در معادله (۲۲) این معادله بر حسب عمق نفوذ به صورت زیر تنظیم می‌شود:

$$w(x)_r = h \left[ 0.958568 \cdot e^{-\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) + \sin(\alpha \cdot x)) + 0.041418 \cdot e^{\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) - \sin(\alpha \cdot x)) \right] \quad (24)$$

با قرار دادن معادله فوق به جای معادله (۹)، معادلات (۱۰) - (۱۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{d}{dx} w(x)_r = -h\alpha \sin(\alpha \cdot x) \times (1.917136 e^{-\alpha \cdot x} + 0.0828236 e^{\alpha \cdot x}), \quad (25)$$

$$m(x)_r = h\alpha^2 \times \left[ 1.917136 e^{-\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) - 1.917136 e^{-\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) + 0.0828368 e^{\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) + 0.0828368 e^{\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) \right], \quad (26)$$

$$q(x)_r = -h\alpha^3 \cos(\alpha \cdot x) \times (3.834272 e^{-\alpha \cdot x} - 0.165673 e^{\alpha \cdot x}), \quad (27)$$

عکس‌العمل بستر و ثابت‌های انتگرال گیری نرمال هستند. با استفاده از این روش دستگاه معادلات نرمالی به دست می‌آید که پنج مجهول  $\bar{C}_1$  تا  $\bar{C}_4$  و موقعیت نرمال جدایی ورق از بستر،  $r_c$ ، در آن حضور دارند و هیچ یک از پارامترهای متغیر فرآیند در آن مشاهده نمی‌شود. در نتیجه با یک بار حل عددی آن مقادیری برای این مجهولات به دست می‌آید و از طریق آن پنج مجهول  $C_1$  تا  $C_4$  و  $x_c$  تعیین می‌شوند که برای هر مقدار از پارامترهای فرآیند معتبر بوده و معادلات دقیقی برای جواب مسئله مورد نظر به دست می‌آید. در این صورت شرایط مرزی نرمال برای نیمه های راست و چپ ورق به ترتیب به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{w}(0)}{dr} = 0, \bar{q}(0) = -1, \\ \bar{m}(r_c) = \bar{q}(r_c) = \bar{p}_z^*(r_c) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{w}(0)}{dr} = 0, \bar{q}(0) = 1, \\ \bar{m}(-r_c) = \bar{q}(-r_c) = \bar{p}_z^*(-r_c) = 0. \end{cases}$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۰) در معادلات (۱۸) و (۱۹) و اعمال شرایط مرزی نرمال از معادلات فوق، دستگاه معادلات جبری نرمال به دست می‌آیند. با حل دستگاه‌های معادلات نرمال، ثابت‌های انتگرال‌گیری نرمال برای نیمه های راست و چپ ورق به شرحی که به ترتیب در ستون‌های اول و دوم جدول ۱ آمده به دست می‌آیند.

**جدول (۱):** موقعیت نرمال جدایی ثابت‌های انتگرال گیری

نرمال برای نیمه راست (ستون اول) و نیمه چپ (ستون دوم).

	نیمه راست ورق	نیمه چپ ورق
$\bar{C}_1$	0.2612914263	0.0112914263
$\bar{C}_2$	0.2612914263	0.0112914263
$\bar{C}_3$	0.0112914263	0.2612914263
$\bar{C}_4$	-0.0112914263	-0.2612914263
$r_c$	$\pi/2$	$-\pi/2$

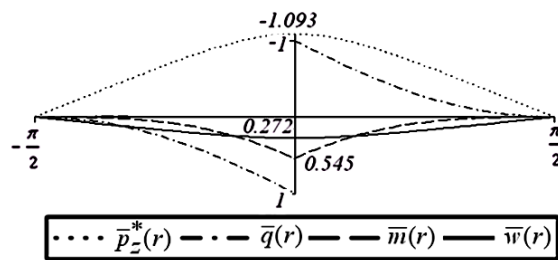


طول ناحیه تماس ورق با بستر لاستیکی با استفاده از رابطه اول معادلات (۲۰) و با جایگذاری  $r_c = \pm\pi/\alpha$  از جدول ۱ در  $r = \alpha \cdot x$  به صورت  $2x_c = \pi/\alpha$  به دست می‌آید. ممان خمشی آستانه تسلیم برای ورق  $m_{el} = S_Y \cdot t^2/6$  است. با برابر قرار دادن ممان خمشی از این رابطه با مقدار ممان خمشی ورق در  $x=0$  از معادله (۲۶)، برای عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق،  $h_{el}$ ، به دست می‌آید:

$$h_{el} = \frac{S_Y \cdot t^2}{12D \alpha^2}. \quad (۳۴)$$

## ۲- تجزیه و تحلیل نتایج

منحنی‌های معادلات نرمال چهارگانه  $\bar{w}(r)$ ،  $\bar{m}(r)$ ،  $\bar{q}(r)$  و  $\bar{p}_z^*(r)$  ورق بر حسب موقعیت نرمال  $z$  نشان دهنده شکل کلی منحنی‌های معادلات چهارگانه  $w(x)$ ،  $m(x)$ ،  $q(x)$ ،  $p_z^*(x)$  ورق خمیده در فرآیند خمش بر روی بستر لاستیکی هستند که اثر اختلاف مشخصات هندسی و مکانیکی ورق در آن‌ها حذف شده است. این منحنی‌ها در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند.



شکل (۴): منحنی‌های نرمال ورق.

شکل منحنی‌های چهارگانه خمش ورق با هر مشخصات مکانیکی و هندسی، دقیقاً همان منحنی‌های نرمال خواهد بود. با این تفاوت که عرض این منحنی‌ها در ضریبی ضرب می‌شود که مشخصات مکانیکی و هندسی، تعیین‌کننده مقدار آن ضریب می‌باشد. منحنی‌های معادلات نرمال چهارگانه با استفاده از جایگذاری معادلات (۲۰) در معادلات (۲۴-۳۳) به دست می‌آیند. برای حصول اطمینان از درستی جواب

$$p_z^*(x)_r = -h\alpha^4 \times \left[ 3.834272 e^{-\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) + 3.834272 e^{-\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) + 0.1656736 e^{\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) - 0.1656736 e^{\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) \right] \quad (۲۸)$$

با همین روش با استفاده از ستون دوم جدول ۱ معادلات (۹-۱۳) برای نیمه چپ ورق نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w(x)_l = h \left[ 0.0414184 \cdot e^{-\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) + \sin(\alpha \cdot x)) + 0.958568 \cdot e^{\alpha \cdot x} (\cos(\alpha \cdot x) - \sin(\alpha \cdot x)) \right], \quad (۲۹)$$

$$\frac{d}{dx} w(x)_l = -h\alpha \sin(\alpha \cdot x) \times (0.0828236 e^{-\alpha \cdot x} + 1.917136 e^{\alpha \cdot x}), \quad (۳۰)$$

$$m(x)_l = h\alpha^2 \times \left[ 0.082836 e^{-\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) - 0.082836 e^{-\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) + 1.917136 e^{\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) + 1.917136 e^{\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) \right], \quad (۳۱)$$

$$q(x)_l = -h\alpha^3 \cos(\alpha \cdot x) \times (0.165673 e^{-\alpha \cdot x} - 3.834272 e^{\alpha \cdot x}), \quad (۳۲)$$

$$p_z^*(x)_l = -h\alpha^4 \times \left[ 0.1656736 e^{-\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) + 0.1656736 e^{-\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) + 3.834272 e^{\alpha \cdot x} \cos(\alpha \cdot x) - 3.834272 e^{\alpha \cdot x} \sin(\alpha \cdot x) \right]. \quad (۳۳)$$

اندیس  $r$  و  $l$  به ترتیب برای نشان دادن کمیت‌های مربوط به نیمه راست یا چپ ورق می‌باشند.

مقایسه این نتایج نشان می‌دهد که جواب‌های ناشی از دو روش حل بر هم منطبق هستند. انطباق نتایج حاکی از درستی و دقت معادله جواب تحلیلی مسئله می‌باشد. طول ناحیه تماس ورق با بستر لاستیکی از رابطه  $2x_c = \pi/\alpha$  به دست می‌آید. این رابطه نشان می‌دهد که طول ناحیه تماس تنها متأثر از پارامتر خمش است که تابعی از مدول الاستیسیته و ضخامت لایه لاستیکی و مدول الاستیسیته، ضخامت و ضریب پواسون ورق می‌باشد. این واقعیت به این معنی است که میزان عمق نفوذ و یا نیروی نفوذ در این طول اثری ندارد. این حقیقت را از منحنی‌های شکل ۵ هم می‌توان استنتاج کرد. در این شکل منحنی‌های  $a$  و  $b$  مربوط به شرایط یکسان آزمایش خمش است که تنها عمق نفوذ در این دو حالت با یکدیگر متفاوت است. در مورد منحنی‌های  $c$  و  $d$  نیز همین گونه می‌باشد.

### ۳- آزمایش‌ها

۳-۱ تجهیزات آزمایش<sup>۱</sup> - این تجهیزات شامل ماشین فرز عمودی Deckel-FP4M، بستر لاستیکی تخت، ورق نازک فلزی، استوانه دقیق، ساعت اندیکاتور با پایه مغناطیسی و شمشه دقیق هستند که در شکل‌های ۱۰-۶ مشاهده می‌شوند. بستر لاستیکی در این آزمایش قطعه‌ای به شکل مکعب مستطیل از جنس لاستیک پلی یورتان می‌باشد که بر روی یک صفحه فولادی چسبانده شده است. در این آزمایش، دو نوع بستر لاستیکی با جنس و ضخامت متفاوت استفاده شده که در شکل ۶ مشاهده می‌شوند. ماده لاستیک‌ها از ورق‌های تختال موجود در بازار تهیه شده و پس از ماشین‌کاری به یک صفحه فولادی چسبانده شده‌اند.

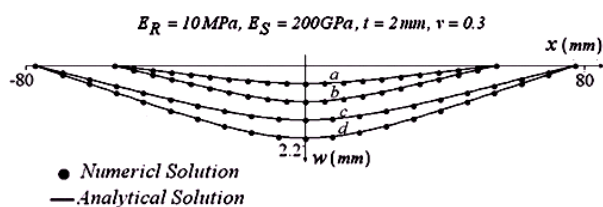
ورق‌های مورد استفاده در این آزمایش‌ها که تحت فرآیند خمش قرار می‌گیرند، فولادی و با ضخامت‌های مختلف و به شکل مستطیلی هستند. نمونه‌های ورق‌های فولادی قبل از فرآیند خمش بر روی بستر لاستیکی در شکل ۷ و نمونه‌ای از این ورق‌ها بعد از انجام فرآیند در شکل ۸ مشاهده می‌شوند. برای بریدن نمونه‌های ورق از فرآیند برش با جت آب و ذرات ساینده استفاده شده است.

تحلیلی، مسئله به روش عددی اختلاف محدود (FDM) نیز حل شده است. با توجه به این که مسئله از نوع مسائل با شرایط مرزی (BVP) است، برای حل عددی آن باید موقعیت مرزها دارای مقادیر معلوم و حقیقی باشند.

همان‌طور که اشاره شد نامعلوم بودن موقعیت‌های جدایی ورق از بستر از مشکلات حل این مسئله می‌باشد. در این مسئله، برای هر نیمه ورق، موقعیت  $x$  یکی از مرزها صفر است ولی موقعیت مرز دیگر به دلیل نامعلوم بودن طول ناحیه تماس، نامعین است. برای رفع این مشکل، مسئله باید به صورت سعی و خطا حل شود. به این صورت که ابتدا برای طول ناحیه تماس مقداری فرض می‌شود، اگر مقدار انتخاب شده صحیح باشد، مقدار خیز ورق در نقطه جدایی صفر خواهد بود، در غیر این صورت باید مقدار فرضی برای طول ناحیه تماس، تغییر یافته و حل عددی تکرار شود تا این که با دقت قابل قبولی این شرط حاصل شود. در صورت حصول این شرط، جواب به دست آمده، جواب مسئله خواهد بود. نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی مسئله در شرایط مختلف فرآیند و برای چهار مورد که در جدول ۲ مشخص شده است، در شکل ۵ نشان داده شده‌اند.

جدول (۲) : پارامترهای خمش برای موارد مختلف.

	$k$	$h$
	MPa/mm	N/mm
$a$	۰/۴	۰/۵
$b$	۰/۴	۱
$c$	۰/۱	۱/۵
$d$	۰/۱	۲



شکل (۵) : مقایسه نتایج حل تحلیلی و حل عددی مسئله.



شکل (۱۰): نمایش وضعیت قرار گرفتن ساعت اندیکاتور برای تعیین مقدار واقعی عمق نفوذ.

در شکل ۹ نمایی از یک دستگاه فرز (شماره ۱) در وضعیت عمودی مشاهده می‌شود. بر روی میز ماشین یک ورق فلزی (شماره ۲) بر روی یک بستر لاستیکی تخت (شماره ۳) قرار گرفته است، سطح زیرین بستر لاستیکی به یک ورق فلزی ضخیم (شماره ۴) که صلب در نظر گرفته می‌شود چسبیده است. ابزارگیر (شماره ۵) به یک میله استوانه‌ای دقیق (شماره ۶) به صورت عمودی نیرو وارد می‌کند و میله در وضعیتی کاملاً موازی نسبت به سطح بستر لاستیکی است و بر روی ورق فلزی تکیه داده شده است. با پیشروی ابزارگیر به سمت میز ماشین که مقدار آن از روی طوق مدرج حرکت عمودی ماشین قابل رؤیت است به همان میزان میله استوانه‌ای به سمت ورق حرکت کرده و ورق را به سمت بستر لاستیکی می‌راند و بدین طریق باردهی در این آزمایش محقق می‌شود.

تعیین مقدار پیشروی میله به سمت ورق از طریق طوق مدرج باردهی محور عمودی ماشین، اندازه‌گیری غیرمستقیم است که با لحاظ کردن چرخش نسبی بین میله و پیچ راهنمای عمودی ماشین انجام می‌شود و در حالت ایده‌آل و نیروی باردهی کم، مقدار آن را می‌توان با مقدار جابه‌جایی نوک ابزارگیر نسبت به سطح میز ماشین تقریباً برابر تلقی کرد ولی به دلیل این که در این فرآیند مقدار نیروی وارد شده به ابزارگیر قابل ملاحظه است نمی‌توان چنین فرضی را دقیق دانست چون به دلیل وجود خاصیت الاستیک مقداری تغییر شکل در اجزای ماشین ایجاد می‌شود که در مقدار نشان داده



شکل (۶): بستر لاستیکی با ضخامت ۵۰ میلی متر (سمت راست) و با ضخامت ۳۵ میلی متر (سمت چپ).



شکل (۷): نمونه‌های ورق‌های فولادی قبل از فرآیند خمش بر روی بستر لاستیکی.

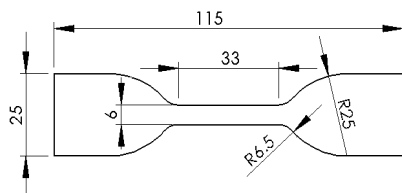


شکل (۸): یک نمونه ورق فولادی به ضخامت ۱ میلی متر پس از فرآیند خمش پلاستیک خمش بر روی بستر لاستیکی.

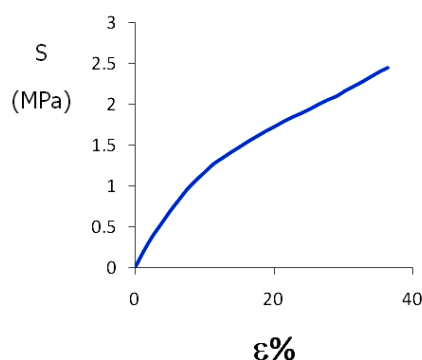


شکل (۹): تجهیزات آزمایش خمش ورق.

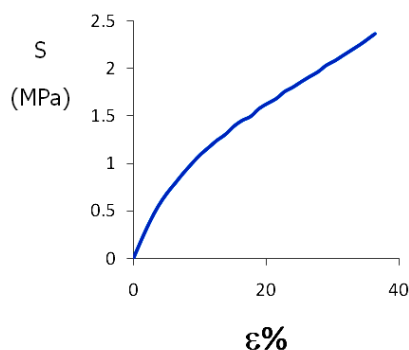
برای محدوده کرنش کوچک که در این آزمایش استفاده شده است مدول الاستیسیته لاستیک‌ها با ضخامت‌های ۳۵ و ۵۰ میلی‌متر که از آزمایش تست کشش به دست آمده است، به ترتیب ۱۸ و ۱۶ MPa می‌باشند.



شکل (۱۲): نقشه نمونه تست کشش استاندارد ASTM- D 412 برای قطعات لاستیکی.



شکل (۱۳): منحنی تنش- کرنش مهندسی ماده بستر لاستیکی به ضخامت ۳۵ میلی‌متر.

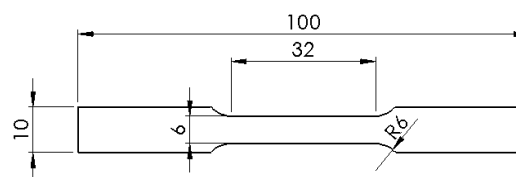


شکل (۱۴): منحنی تنش- کرنش مهندسی ماده بستر لاستیکی به ضخامت ۵۰ میلی‌متر.

شده در طوق مدرج ماشین لحاظ نمی‌گردد و منشأ خطا می‌باشد. برای حذف اثر این خطا در آزمایش، یک عدد ساعت اندیکاتور Mitotoyo با کوچک‌ترین تقسیم بندی ۰/۰۱ میلی‌متر به صورتی که در شکل ۱۰ نشان داده شده است بر روی میله استوانه‌ای نصب می‌شود تا مقدار واقعی عمق نفوذ در هر آزمایش معلوم شود.

۲-۳ شرایط آزمایش: مشخصات پارامترهای اصلی آزمایش به صورت خلاصه به شرح زیر می‌باشند:

- نمونه های ورق: در این آزمایش از نمونه های ورق فولادی با پهنای ۱۱۳ میلی‌متر و ۹۸ میلی‌متر، به ضخامت‌های ۱، ۲ و ۳ میلی‌متر استفاده شده است. از مواد اولیه هر یک از ورق‌ها یک عدد نمونه تست کشش (سه نمونه) مطابق با شکل ۱۱ بر اساس استاندارد ASTM- E 8M تهیه و مورد آزمایش تست کشش قرار گرفت.



شکل (۱۱): نقشه نمونه تست کشش استاندارد ASTM- E 8M قطعات فلزی.

با استفاده از نتایج تست کشش نمونه های فوق مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگا پاسکال و مقادیر تنش تسلیم برای ورق‌های با ضخامت ۱، ۲ و ۳ میلی‌متر به ترتیب ۱۸۰، ۱۸۰ و ۲۰۰ مگا پاسکال به دست آمد.

- بستر لاستیکی: بسترهای لاستیکی از جنس پلی یورتان به ابعاد ۹۸×۵۰×۲۵۰ میلی‌متر می‌باشند. نمونه تست کشش بر اساس استاندارد ASTM- D 412 مطابق شکل ۱۲ از هر یک از بسترهای با ضخامت ۳۰ و ۵۰ میلی‌متری و مورد آزمایش تست کشش قرار گرفت. منحنی‌های تنش-کرنش مهندسی ماده دو نوع لاستیک مورد استفاده در بسترها در شکل‌های ۱۴-۱۵ نشان داده شده‌اند.

## ۳-۳ نحوه آزمایش

در طی این آزمایش عمق نفوذ آستانه تسلیم تعیین می‌شود. این مقدار، معادل با عمق نفوذی است که تسلیم ورق در آن نقطه آغاز شده و در عمق نفوذ بیشتر از این مقدار، دچار خمش دائمی می‌شود. برای این منظور ورق بر روی بستر لاستیکی قرار داده شده و با بار دهی محور عمودی ماشین ورق توسط میله استوانه‌ای به سمت بستر لاستیکی نفوذ داده می‌شود. سپس بار از روی آن حذف و ورق از روی بستر جدا می‌گردد. به کمک شمشه دقیق با لبه چاقویی (شکل ۱۵) مستقیم بودن امتداد طولی ورق بررسی می‌شود. در صورتی که تغییر شکل ورق در محدوده الاستیک باشد ورق همچنان تخت باقی مانده و شمشه وضعیت مستقیم را نشان می‌دهد و اگر وارد محدوده پلاستیک شده باشد دچار خمش شده و شمشه خروج از مستقیم بودن را نشان می‌دهد. این آزمایش با مقدار کم عمق نفوذ آغاز شده و به تدریج عمق نفوذ بیشتر تکرار می‌شود تا این که شمشه در آخرین تکرار آزمایش، وضعیت غیر مستقیم را نشان دهد. در این لحظه نشان از آغاز خمش دارد. عمق نفوذ در آخرین تکرار آزمایش، عمق نفوذ آستانه تسلیم می‌باشد. با انتخاب مقدار افزایش عمق نفوذ در هر مرحله می‌توان دقت تعیین عمق نفوذ آستانه تسلیم را افزایش داد. در این آزمایش در مراحل پایانی آزمایش مقدار ۰/۱ میلی متر انتخاب شده است و بنابراین با این دقت عمق نفوذ آستانه تسلیم تعیین شده است.



شکل (۱۵) : تصویر شمشه دقیق با لبه چاقویی.

## ۳-۴ نتایج آزمایش

نتایج آزمایش خمش بر روی سه ورق با ضخامت مختلف بر روی دو بستر لاستیکی در جدول شماره ۳ نشان داده شده‌اند. بررسی نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد حداکثر ۲۳٪ اختلاف بین نتایج تحلیلی و تجربی وجود دارد. برای داشتن درک بهتر از نتایج آزمایش موجود در این جدول، نتایج به صورت نمودار در شکل‌های ۱۶-۱۵ نشان داده شده‌اند. اختلافی که در بین نتایج تئوریک و تجربی مشاهده می‌شود ممکن است از چندین منشأ سرچشمه گرفته باشد: تناسب و انطباق نوع مدل انتخابی برای فرمولاسیون مسئله، درستی و دقت حل معادلات استخراج شده برای مسئله، دقت در انجام آزمایش و اندازه‌گیری پارامترهای مؤثر در نتایج آزمایش.

جدول (۳) : نتایج تجربی حاصل از آزمایش برای تعیین عمق نفوذ آستانه تسلیم.

بستر لاستیکی	ضخامت (mm)	۳۵			۵۰		
	مدول الاستیسیته (MPa)	۱۸			۱۶		
ورق فولادی	ضخامت ورق (mm)	۱	۲	۳	۱	۲	۳
	تنش تسلیم (MPa)	۱۸۰	۱۸۰	۲۰۰	۱۸۰	۱۸۰	۲۰۰
عمق نفوذ تسلیم	تحلیلی (mm)	۰/۳۱	۰/۴۳	۰/۵۹	۰/۳۹	۰/۵۵	۰/۷۵
	تجربی (mm)	۰/۲۶	۰/۳۳	۰/۴۵	۰/۳	۰/۴۵	۰/۵۸
درصد اختلاف نتایج تجربی و تحلیلی		%۱۶	%۲۳	%۲۳	%۲۳	%۱۸	%۲۲

در مورد تناسب و انطباق نوع مدل انتخابی برای فرمولاسیون مسئله، باید اذعان داشت که معمولاً یافتن مدل‌هایی که با دقت بسیار بالا بتوانند فرایندها را پیش بینی نمایند بسیار مشکل است. در مورد فرآیند حاضر نیز که به مسئله پیچیده تماس و نفوذ یک ورق در یک محیط الاستیک مربوط می‌شود و تحقیقات متعددی در این زمینه تا به حال صورت گرفته است و همچنان ادامه دارد، این پیچیدگی وجود

به دست آمده جواب درستی برای معادله حاکم می‌باشد. در نتیجه این عامل نمی‌تواند نقشی در ایجاد اختلاف بین نتایج تئوریک و تجربی داشته باشد.

برای کاهش خطای حاصل از عدم دقت در انجام آزمایش و اندازه‌گیری پارامترهای مؤثر در آن همان طور که قبلاً اشاره شد سعی بر این بوده است که با استفاده از یک ساعت اندیکاتور اندازه‌گیری غیر مستقیم عمق نفوذ از طریق طوق مدرج حرکت عمودی میز ماشین فرز با اندازه‌گیری مستقیم از طریق ساعت اندازه‌گیری جایگزین شده و دقت اندازه‌گیری این پارامتر ورودی فرآیند تا حد امکان افزایش یابد و تغییرات این پارامتر ورودی فرآیند با تقسیم بندی ۰/۰۱ میلی‌متر امکان پذیر باشد.

بنابراین، با توجه به توضیحاتی که در بالا داده شد به نظر می‌رسد که عمده اختلاف موجود بین نتایج تئوریک و تجربی که حداکثر ۲۳٪ می‌باشد، عمدتاً ناشی از مدل انتخاب شده برای تعامل بین ورق و بستر می‌باشد و با توجه با این که اولین فرمولاسیون ارائه شده برای این فرآیند می‌باشد در مجموع قابل قبول به نظر می‌رسد.

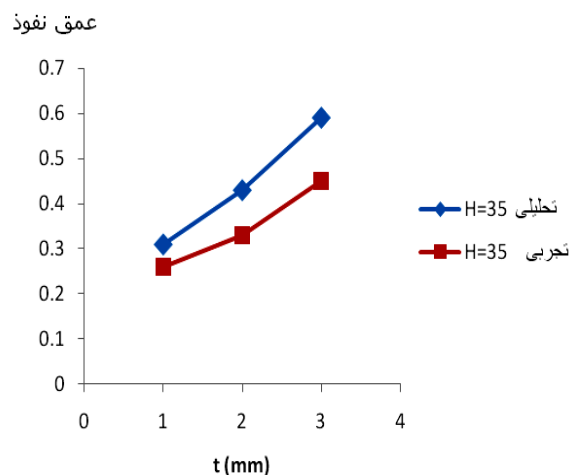
بررسی نتایج حاصل از آزمایش‌ها نشان می‌دهد حداکثر ۲۳ درصد اختلاف بین نتایج تحلیلی و تجربی وجود دارد که در جهت پیش‌بینی شده از قبل یعنی کم بودن نتایج تجربی از نتایج تئوریک و محاسباتی می‌باشد در نتیجه این میزان اختلاف و جهت آن، معادلات استخراج شده برای تحلیل مسئله را قابل قبول نشان می‌دهد.

با توجه به این که در کارهای قبلی انجام شده [۸-۹] برای مطالعه دقیق این فرآیند مطالعات و آزمایش‌ها بر روی پروفیل و قوطی خاصی صورت گرفته است و قطعه مورد نظر به شکل یک ورق ساده نبوده است، عملاً نمی‌توان نتایج به دست آمده از این تحقیق را با نتایج کارهای قبلی مقایسه نمود.

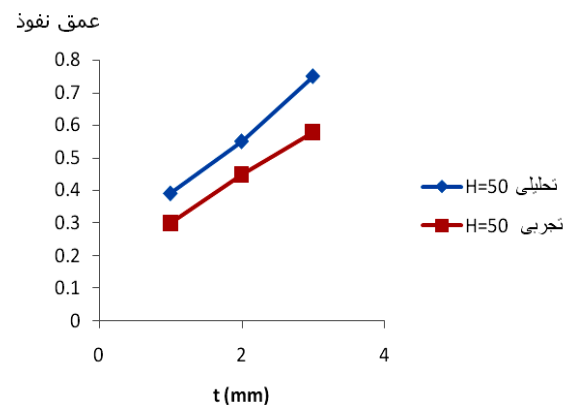
#### ۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، برای اولین بار معادله حاکم بر فرآیند خمش الاستیک ورق فلزی بر روی بستر لاستیکی استخراج و سپس به روش تحلیلی حل شده است. با حل این معادله، جواب دقیق مسئله که معادله خیز الاستیک ورق در ناحیه تماس

دارد. به‌خصوص که این اولین کاری است که در طی آن یک تحلیل ریاضی برای فرمولاسیون این فرآیند ارائه شده است. در نتیجه می‌توان انتظار داشت بخش عمده‌ای از اختلاف بین نتایج تئوری و تجربی به این عامل مربوط شود.



شکل (۱۵) : نمودار نتایج عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق در بستر لاستیکی به ضخامت ۳۵ میلی‌متر.



شکل (۱۶) : نمودار نتایج عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق در بستر لاستیکی به ضخامت ۵۰ میلی‌متر.

برای اطمینان از درستی و دقت حل تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم و انتساب معادله جواب استخراج شده به آن، می‌توان به نتایج حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به روش FDM که در بالا ذکر شد و نتایج آن در منحنی‌های شکل ۵ دیده می‌شود، استناد نموده و این نتیجه را گرفت که روش حل معادله حاکم بر مسئله صحیح بوده و معادله جواب



## مراجع

1. Yang, M. and Shima, S., "Simulation of Pyramid Type Three-roll Bending Process", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 12, pp. 877-886, 1988.
2. Yang, G., Mori, K.I., and Osakada, K.m "Determination of Forming Path in Three-roll Bending, Using FEM Simulation and Fuzzy Reasoning", *J. Mat. Processing Tech.*, Vol. 45, No.'s. 1-4, pp. 161-166, 1994.
3. Gandhi, A.H. and Raval, H.K., "Analytical and Empirical Modeling of Top Roller Position for Three-roller Cylindrical Bending of Plates and Its Experimental Verification", *J. Mat. Processing Tech.*, Vol. 197, No.'s. 1-3, pp. 268-278, 2008.
4. Hua, M., Baines, K., and Cole, I. M., "Continuous Four-roll Plate Bending: a Production Process for the Manufacture of Single Seamed Tubes of Large and Medium Diameters", *Int. J. Machine Tools and Manufacture*, Vol. 39, No. 6, pp. 905-935, 1999.
5. Hua, M. and Lin, Y.H., "Effect of Strain Hardening on the Continuous Four-roll Plate Edge Bending Process", *J. Mat. Processing Tech.*, Vol's. 89-90, pp. 12-18, 1999.
6. Lin, Y. H. and Hua, M., "Influence of Strain Hardening on Continuous Plate Roll-bending Process", *Int. J. Non-linear Mech.*, Vol. 35, No. 5, pp. 883-896, 2000.
7. Vollertsen, F., Sprenger, A., Kraus, J., and Arnet, H., "Extrusion, Channel, and Profile Bending: a Review", *J. Mat. Processing Tech.* Vol. 87, No's. 1-3, pp. 1-27, 1999.
8. Kwon, H.C., Im, Y.T., Ji, D.C., and Rhee, M.H., "The Bending of an Aluminum Structural Frame With a Rubber Pad", *J. Mat. Processing Tech.* Vol. 113, No's. 1-3, pp. 786-791, 2001.
9. Lee, J.W., Kwon, H.C., Rhee, M.H., and Im, Y.T., "Determination of Forming Limit of a Structural Aluminum Tube in Rubber Pad Bending", *J. Mat. Processing Tech.*, Vol. 140, No's. 1-3, pp. 487-493, 2003.
10. Geiger, M., Engel, U., and Ende, A.V., "Investigations on the Sheet Bending Process with Elastic Tools", *J. Mat. Processing Tech.* Vol. 27, No's. 1-3, pp. 265-277, 1991.
11. Zhupanska, O.I. and Ulitko, A.F., "Contact with Friction of a Rigid Cylinder with an Elastic Half-space", *J. Mech. and Physics of Solids*, Vol. 53, pp. 975-999, 2005.
12. Adibnazari, S., Naderi, D., and Sharafbafi, F., "Analytical Solution for Contact Problem Between a Titled Wedge and Half-plane under Partial Slip Condition", *Mat. and Design*, Vol. 29, No. 7, pp. 1291-1299, 2008.

ورق و لاستیک است و از طریق آن معادلات شیب، ممان خمشی، نیروی برشی ورق و عکس‌العمل بستر بر روی ورق به دست آمده‌اند. سپس، معادله تعیین کننده عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق در این فرآیند که بر حسب پارامترهای فرآیند می‌باشد، استخراج شده است.

حل عددی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به روش اختلاف محدود (FDM) برای چندین مورد انجام شده است. مقایسه نتایج و جواب‌های حل عددی با جواب دقیق حاصل از حل تحلیلی معادله فوق، نشان می‌دهد جواب به دست آمده از روش تحلیلی معتبر و دقیق می‌باشد.

مقایسه نتایج تجربی به دست آمده برای عمق نفوذ آستانه تسلیم ورق برای چندین مورد نشان‌دهنده این است که اولاً درصد خطا در حد قابل قبول است، ثانیاً خطا در جهتی است که متناظر با مدول الاستیسیته بیشتر برای بستر است. این امر با فرضی که در مدل انتخابی وجود دارد و سبب کاهش مدول بستر از مقدار واقعی می‌شود سازگار است.

نتایج تحلیلی نشان می‌دهند که طول ناحیه تماس تنها متأثر از پارامتر خمش است که تابعی از مدول الاستیسیته و ضخامت لایه لاستیکی و مدول الاستیسیته، ضخامت و ضریب پواسون ورق می‌باشد و میزان عمق نفوذ و یا نیروی نفوذ در مقدار این طول اثری ندارد.

از ویژگی‌های مهم این تحقیق این است که اولاً برای اولین بار این فرآیند فرموله شده و یک معادله دیفرانسیل حاکم بر آن ارائه شده است. ثانیاً با روش حلی کاملاً ابتکاری، معادله جواب دقیقی برای آن یافت شده است که بر حسب پارامترهای فرآیند یعنی مدول الاستیسیته و تنش تسلیم و مشخصات هندسی ورق و مدول الاستیسیته و مشخصات هندسی بستر لاستیکی و عمق نفوذ است که قابل اندازه‌گیری قبل از فرآیند می‌باشد و بر خلاف معادلات جواب معمولاً پیچیده و بغرنجی که برای مسائل مشابه در مسائل تماس و نفوذ ارائه می‌شود، بسیار ساده و سهل برای استفاده می‌باشد.

13. Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., and Goncalves, P.B., "Numerical Methods for Analysis of Plates on Tensionless Elastic Foundations", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 38, No's. 10-13, pp. 2083-2100, 2001.
14. Kukreti, A.R. and Ko, M.G., "Analysis of Rectangular Plate Resting on an Elastic Half Space, Using an Energy Approach", *Applied Math. Modelling*, Vol. 16, No. 7, pp. 338-356, 1992.
15. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells", WCB/McGraw Hill, Boston, 1999.
16. Ventsel, E., and Krauthammer, T., "Thin Plates and Shells Theory Analysis and Applications", CRC Press, New York, 2001.
17. Szilard, R., "Theories and Applications of Plate Analysis", John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
18. Ward, I.M., "Mechanical Properties of Solid Polymers", John Wiley & Sons, Chichester, 1979.